Metode *Split Step Fourier* Untuk Menyelesaikan *Nonlinear Schrödinger Equation* Pada *Nonlinear* Fiber Optik

Endra

Fakultas Ilmu Komputer, Jurusan Sistem Komputer, Universitas Bina Nusantara
Jl K.H. Syahdan No.9, Kemanggisan, Jakarta 11480, Indonesia
email : endraoey@binus.ac.id

ABSTRAK

Pada tulisan ini dibuat algortima numerik untuk melakukan metode *Split Step Fourier* (*SSF*) dalam menyelesaikan *Nonlinear Schrödinder Equation* (*NSE*) pada *nonlinear fiber* optik. Juga dibuat algoritma numerik untuk melakukan metode *Symmetrized Split Step Fourier* (*SSSF*) sebagai pengembangan dari metode *SSF*. Hasil dari metode *SSF* dan *SSSF* ini dibandingkan dengan solusi eksak dari *NSE* dan didapatkan metode *SSSF* memberikan tingkat kesalahan yang lebih kecil dibandingkan metode *SSF*. Dianalisa juga pengaruh *step size* dan jumlah titik *Fast Fourier Transform* (*FFT*) pada metode *SSF* dan *SSSF* dan didapatkan hasil bahwa semakin kecil *step size* maka tingkat kesalahan dari metode *SSF* akan semakin kecil, sedangkan pada metode *SSSF* tingkat kesalahan cenderung tetap. Jumlah titik *FFT* baik pada metode *SSF* dan *SSSF* tidak mempengaruhi tingkat kesalahan.

Kata kunci: Algortima numerik, *Split Step Fourier* (*SSF*), *Nonlinear Schrödinder Equation* (*NSE*), *Step size*, *Fast Fourier Transform (FFT)*.

1. PENDAHULUAN

NLSE adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang memodelkan perambatan gelombang dalam suatu medium nonlinier. *NLSE* ini merupakan bentuk nonlinier dari persamaan *Schrödinger* dua dimensi pada fisika hanya saja parameter waktu dan spasialnya bertukaran [1].

Untuk medan kompleks, *A*, yang merambat dalam suatu medium, persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$i\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{2}T\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + V|A|^2 A \qquad (1)$$

dimana *T* dan *V* adalah parameter linier dan nonlinier dari medium tersebut, *z* adalah arah dari perambatan gelombang dan *t* adalah waktu.

Sifat *non-linear* pada fiber optik dibagi menjadi dua kategori, yaitu *stimulated scattering (Raman and Brillouin)* dan *optical Kerr effect* yaitu perubahan indeks bias terhadap daya optik *(nonlinear refractive index)*. Dimana *stimulated scattering* menyebabkan kebergantungan *gain* atau *loss* terhadap intensitas. Perbedaan utama antara *stimulated scattering* dan *Kerr effect* adalah *stimulated scattering* memerlukan batas level daya untuk dapat terjadi sedangkan *Kerr effect* tak memerlukannya [2].

Untuk memodelkan perambatan pulsa optik pada fiber optik nonlinier maka *NLSE* dituliskan menjadi :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2}b_2\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = ig\,|A|^2 A \qquad (2)$$

dimana *A*, β_2 dan γ adalah *pulse envelope (slowly varying variable)*, parameter linier yaitu *GVD (Group Veloctiy Delay)* yang merupakan sifat dispersi dari fiber optik dan parameter nonlinier. *T* adalah waktu di dalam kerangka acuan yang bergerak bersama pulsa, dimana $T = t - z/v_g$ dan v_g adalah kecepatan *group* pada pusat panjang gelombang.

Pers. (2) tersebut berlaku dengan asumsi-asumsi : lebar pulsa optik ≥ 0.1 ps, pulsa optik merambat di dalam fiber tanpa pelemahan (*lossless fiber*), hanya *Kerr effects* yan diperhitungkan dan pulsa optik tetap terpolarisasi linier sepanjang perambatannya [3].

Pers. (2) dapat dituliskan dalam bentuk normalisasi :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{sgn}(b_2)\frac{i}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = iN^2|U|^2 U \qquad (3)$$

dimana : $t = \dfrac{T}{T_0}$; $L_D = \dfrac{T_0^{\,2}}{|b_2|}$; $L_N = \dfrac{1}{gP_0}$; $x = \dfrac{z}{L_D}$;

$N^2 = \dfrac{L_D}{L_N}$; $U = \dfrac{A}{\sqrt{P_0}}$ and *sgn*(β_2) bernilai +1 and -1 bergantung pada apakah β_2 positif atau negatif. *U*, P_0, ξ, T_0, L_D, dan L_N adalah pulse envelope ternormalisasi, daya puncak pulsa, jarak ternormalisasi, lebar pulsa input, panjang dispersi dan panjang nonlinier.

2. METODE

Pers. (3) akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode *SSF* dengan membuat programnya. Dengan memberikan nilai input tertentu sehingga pers. (3) didapatkan solusi eksak-nya kemudian dibandingkan dengan solusi dari metode *SSF*.

2.1 Metode *SSF*

Persamaan (2.17) dapat diselesaikan secara numerik menggunakan *SSF* menuliskan persaman (2.17) dalam bentuk :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\hat{D} + \hat{N}\right) U \qquad (4)$$

$\hat{D}$ adalah operator differensial untuk sifat linier fiber :

$$\hat{D} = -\operatorname{sgn}(b_2)\frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (5)$$

$\hat{N}$ adalah operator differensial untuk sifat non-linier fiber :

$$\hat{N} = iN^2 |U|^2 \qquad (6)$$

Solusi persamaan (4) adalah :

$$U(x+\Delta x, t) = \exp\left(\Delta x\left(\hat{D} + \hat{N}\right)\right) U(x,t) \qquad (7)$$

dimana *h* = *step size* dinormalisasi terhadap L_D, jika nilai *h* cukup kecil maka pers. (7) dapat dituliskan :

$$U(x+\Delta x, t) \approx \exp\left(\Delta x\, \hat{D}\right)\exp\left(\Delta x\, \hat{N}\right) U(x,t) \qquad (8)$$

Solusi *NLSE* pada persamaan (8) disebut metode *SSF* karena perambatan pulsa dari ξ ke $\xi + \Delta\xi$ diselesaikan dengan 2 *step* yaitu *step* pertama dianggap non-linieritas bekerja sendiri ($\hat{D}$ = 0) dan step kedua dianggap dispersi bekerja sendiri ($\hat{N}$ = 0) dimana operasi dilakukan dalam domain frekuensi menggunakan transformasi *Fourier* dengan memanfaatkan algoritma *Fast Fourier Transform* (*FFT*) [4].

Dari pers. (7) dan pers. (8), tingkat kesalahan dari metode *SSF* pada persamaan (8) adalah orde 2 dari *step size* $\left(O\left(\Delta x^2\right)\right)$ [3]. Eksekusi dari operator eksponensial $\left(\exp\left(\Delta x\, \hat{D}\right)\right)$ di dalam domain *Fourier* menggunakan :

$$\exp\left(\Delta x\, \hat{D}\right) B(x,t) = \left(F^{-1}\exp\left(\Delta x\, \hat{D}(iw)\right) F\right) B(x,t) \qquad (9)$$

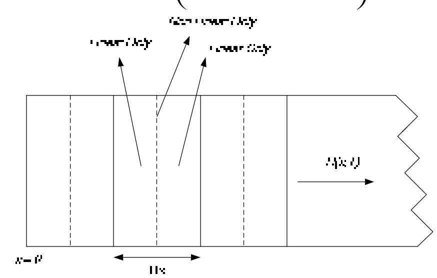
$\hat{D}(iw)$ didapatkan dengan mengganti operator differensial $\frac{\partial}{\partial t}$ dengan iw .

Untuk meningkatkan akurasi maka digunakan metode *Symmetrized Split Step Fourier Method (SSSF)*, lihat Gambar 1. Pada *SSSF* non-linieritas dianggap berada di pertengahan segmen *step size* dan dihitung efeknya untuk keseluruhan segmen sehingga solusi untuk pers. (7) adalah

$$U(x+\Delta x, t) = \exp\left(\frac{\Delta x}{2}\hat{D}\right)\exp\left(\int_x^{x+\Delta x}\hat{N}(x')\,dx'\right)\exp\left(\frac{\Delta x}{2}\hat{D}\right)U(x,t) \qquad (10)$$

dimana :

$$\int_x^{x+h}\hat{N}(x')\,dx' \approx \frac{h}{2}\left(\hat{N}(x) + \hat{N}(x+h)\right) \qquad (11)$$



Gambar 1. Metode *Symmetrized Split Step Fourier*.

Pers. (11) digunakan untuk memperhitungkan efek non-linieritas keseluruhan segmen. Persamaan (10) memerlukan iterasi karena $\hat{N}(x+\Delta x)$ tidak diketahui pada $\xi + \Delta\xi/2$, awalnya $\hat{N}(x+\Delta x)$ diasumsikan sama dengan $\hat{N}(x)$ kemudian dimasukan ke persamaan (10) dan hasilnya digunakan untuk menghitung $\hat{N}(x+\Delta x)$.

Tingkat kesalahan dari *SSSF* adalah orde 3 dari *step size* $\left(O\left(\Delta x^3\right)\right)$ [3].

2.2 Akurasi dari Metode *SSF* dan *SSSF*

Solusi numerik *NLSE* menggunakan metode *SSF* dan *SSSF*, akurasinya akan diuji dengan membandingkan solusi eksak dari *NLSE*. Ketika pulsa input adalah *U(0,τ)* = *sech(τ)*, maka solusi eksak dari *NLSE* didapat dengan menggunakan *Inverse Scattering Transform (IST)* dengan N = 1 dan β_2 negatif, hasilnya adalah :

$$U(x,t) = \operatorname{sec}h(t)\exp\left(i\frac{x}{2}\right) \qquad (12)$$

Dari pers. (12) dapat dilihat bahwa hanya fase dari pulsa yang berubah sedangkan bentuk dan amplitudo pulsa tak mengalami perubahan sepanjang perambatan di fiber optik. Solusi pada pers. (12) disebut *fundamental soliton*, sedangkan solusi untuk N = 2, 3, 4… disebut *higher order soliton* [1].

Pers. (12) sangat cocok untuk melihat akurasi dari *SSSFM* karena solusinya adalah sebagai hasil dari interaksi antara dispersi dan sifat non-linier dari fiber.

Parameter *Normalized Square Deviation* (*NSD*) untuk membandingkan solusi *NLSE* dengan metode *SSF* atau *SSSF* dan dengan *IST* didefenisikan [2] :

$$NSD = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_A(x,t) - U_B(x,t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|U(0,t)\right|^2 dt} \qquad (13)$$

dimana U_A adalah *output field envelop* menggunakan *SSF* atau *SSSF* dan U_B adalah *output field envelop* menggunakan *IST*.

Pada fiber non-linier, bentuk pulsa pada output fiber dapat menyimpang dari bentuk pulsa inputnya dan dapat memiliki bentuk yang sangat rumit. *RMS pulse width*, σ, sering digunakan untuk menyatakan lebar pulsa dengan lebih akurat. *RMS pulse width* didefenisikan [1] :

$$s = \left[< t^2 > - < t >^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

dimana :

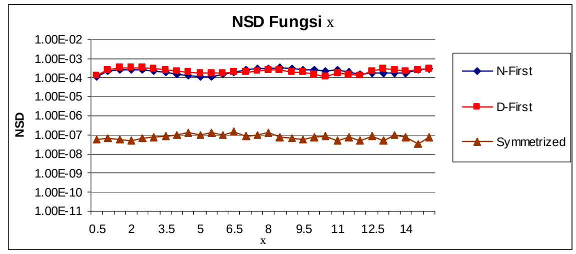
$$< t^n > = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^n \left|U(x,t)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|U(x,t)\right|^2 dt} \qquad (15)$$

3. HASIL HASIL DAN PEMBAHASAN

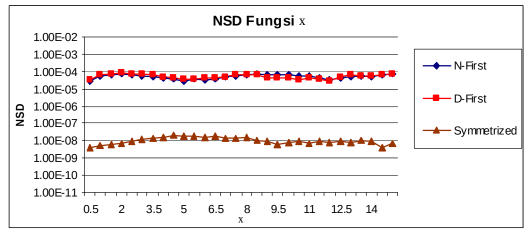
3.1 Akurasi dari Metode *SSF* dan *SSSF*

3.1.1 Pengaruh *Step Size*

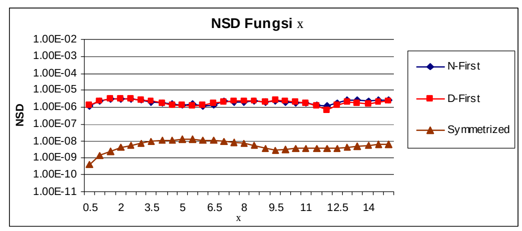
Gambar 2.(a) sampai 2.(e) adalah grafik *NSD* terhadap jarak perambatan, ξ untuk nilai $\Delta\xi$ = 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 dan 0,001.



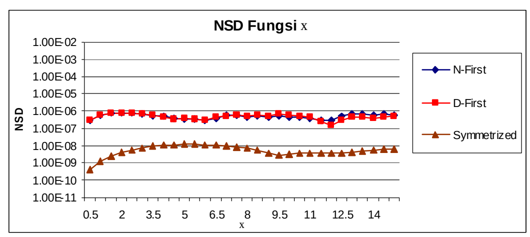
(a) $\Delta\xi$ = 0,1



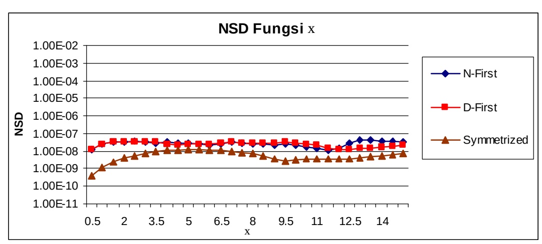
(b) $\Delta\xi$ = 0,05



(c) $\Delta\xi$ = 0,01



(d) $\Delta\xi$ = 0,01



(e) $\Delta\xi$ = 0,01

Gambar 2. Grafik *NSD* terhadap jarak perambatan, ξ, untuk nilai $\Delta\xi$ = 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 dan 0,001.

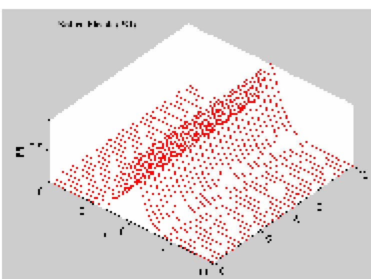
Grafik tersebut diperoleh dengan memberikan input $U(0,\tau) = sech(\tau)$ pada pers. (3) dengan $N = 1$ (*fundamental soliton*), kemudian membandingkan solusi eksaknya yaitu pers. (12) dengan metode *SSF* dan *SSSF*. Pada metode *SSF*, operasi pada pers. (8) dilakukan dengan dua cara yaitu bagian nonlinier dihitung lebih dahulu baru bagian linier (*N-First*) dan sebaliknya (*D-First*). Nilai NSD dihitung menggunakan pers. (13).

Tabel 1 memberikan nilai rata-rata *NSD* sepanjang perambatan untuk masing-masing metode dan nilai $\Delta\xi$.

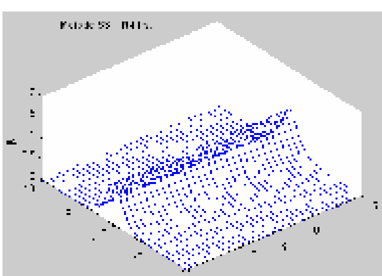
Tabel 1 Nilai NSD rata-rata dengan berbagai nilai Δξ untuk fundamental soliton

Step Size $\Delta\xi$	*NSD rata-rata*		
	SSF N-First	***SSF D-First***	***SSSF***
0,1	$2{,}14.10^{-4}$	$2{,}25.10^{-4}$	$8{,}18.10^{-8}$
0,05	$5{,}27.10^{-5}$	$5{,}2810^{-5}$	$1{,}07.10^{-8}$
0,01	$2{,}03.10^{-6}$	$1{,}95.10^{-6}$	$6{,}13.10^{-9}$
0,005	$5{,}08.10^{-7}$	$4{,}81.10^{-7}$	$6{,}12.10^{-9}$
0,001	$2{,}71.10^{-8}$	$2{,}45.10^{-8}$	$6{,}12.10^{-9}$

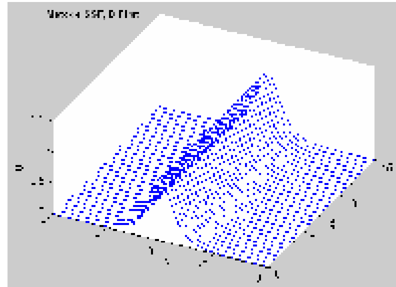
Gambar 3.(a) sampai 3.(d) adalah perambatan *fundamental soltion* untuk solusi eksak menggunakan *IST*, dan metode *SSF* (*N-First* dan *D-First*) dan *SSSF*, untuk Δξ = 0,005.



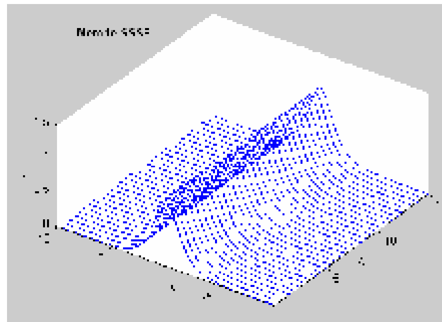
(a) Metode *IST* (Solusi Eksak)



(b) Metode *SSF*, *N-First*



(c) Metode *SSF*, *D-First*



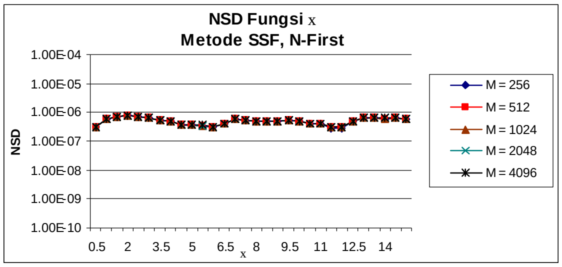
(d) *SSSF*

Gambar 3. Perambatan *fundamental soliton* dengan metode (a). *IST*, (b). *SSF, N-First*, (c). *SSF, D-First* dan (d). *SSSF*, untuk $\Delta\xi$ = 0,005.

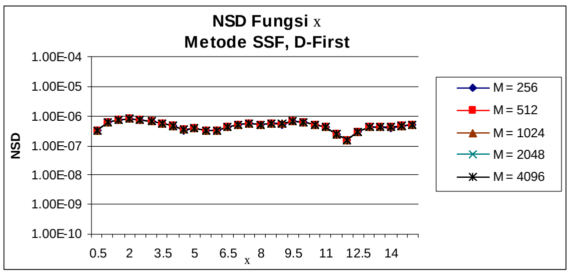
Dari hasil-hasil tersebut dapat dilihat bahwa pada metode *SSF* baik *N-First* maupun *D-First* memberikan hasil yang sama dimana untuk penurunan nilai $\Delta\xi$ sebesar 1 orde memberikan penurunan NSD kira-kira sebesar 2 orde, sesuai dengan tingkat kesalahan yang diturunkan dar pers. 7 dan pers. 8. Metode *SSSF* memberikan tingkat kesalahan yang lebih kecil dibandingkan metode *SSF*, yaitu sekitar 3 orde. Namun tingkat kesalahan ini tidak turun dengan signifikan dengan turunnya $\Delta\xi$ dan tidak berubah untuk nilai $\Delta\xi$ = 0,01, 0,005 dan 0,001. Hal tersebut disebabkan karena metode *SSSF* melakukan proses lebih panjang dan diperlukan iterasi sehingga turunnya tingkat kesalahan disebabkan turunnya $\Delta\xi$ diimbangi dengan naiknya kesalahan yang lain, misalnya kesalahan pembulatan dan kesalahan perhitungan *FFT*.

3.1.2 Pengaruh Jumlah Titik *FFT*

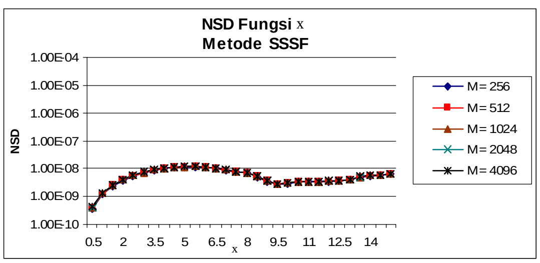
Gambar 4.(a) sampai 4.(c) adalah grafik *NSD* terhadap jarak perambatan, ξ, untuk ketiga metode di atas dengan jumlah sampel *FFT*, M = 256, 512, 1024, 2048 dan 4096 dimana digunakan nilai *step size*, $\Delta\xi$ = 0,005.



(a) **Metode *SSF, N-First***



(b) **Metode *SSF, D-First***



(c) **Metode *SSSFM***

Gambar 4. Grafik *NSD* terhadap jarak perambatan, *ξ*, untuk ketiga metode dengan jumlah sampel *FFT*, *M* = 256, 512, 1024, 2048 dan 4096.

Tabel 2 memberikan nilai rata-rata *NSD* sepanjang perambatan untuk masing-masing metode dan nilai *Δξ*.

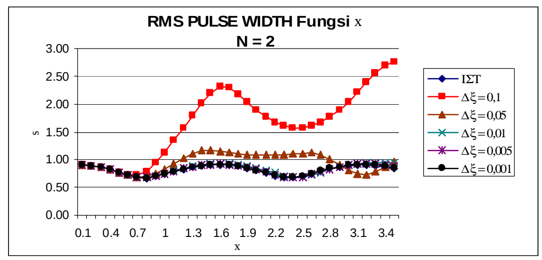
Tabel 2 Nilai *NSD* rata-rata dengan berbagai jumlah sample *FFT* untuk *fundamental soliton*

Jumlah Sampel *FFT* *M*	*NSD rata-rata*		
	SSF N-First	*SSF D-First*	*SSSF*
256	$5{,}04.10^{-7}$	$4{,}78.10^{-7}$	$5{,}85.10^{-9}$
512	$5{,}06.10^{-7}$	$4{,}80.10^{-7}$	$6{,}00.10^{-9}$
1024	$5{,}08.10^{-7}$	$4{,}81.10^{-7}$	$6{,}08.10^{-9}$
2048	$5{,}08.10^{-7}$	$4{,}81.10^{-7}$	$6{,}12.10^{-9}$
4096	$5{,}08.10^{-7}$	$4{,}81.10^{-7}$	$6{,}14.10^{-9}$

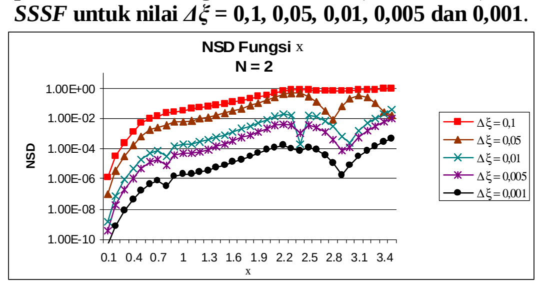
Jumlah sample *FFT* yang berkaitan dengan frekuensi sampling ditentukan oleh lebar frekuensi dan *bit-rate* dari pulsa optik yang masuk ke dalam fiber optik. Namun dari hasil-hasil tersebut dapat dilihat bahwa pada metode *SSF* baik *N-First* maupun *D-First* dan metode *SSSF* jumlah sample *FFT* tidak mempengaruhi tingkat kesalahan.

3.1.3 *Higher Order Soliton*

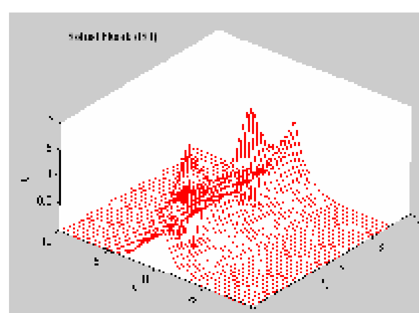
Gambar 5. dan 6. adalah grafik *RMS pulse width* dan *NSD* terhadap jarak perambatan, *ξ*, hasil solusi *NLSE* untuk *N = 2* (*soliton* orde 2) menggunakan metode *SSSF* dan solusi eksaknya menggunakan *IST* [ ].



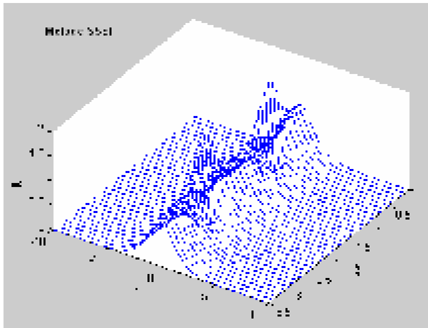
Gambar 5. Grafik *RMS pulse width, σ*, terhadap jarak perambatan, *ξ*, dengan metode *IST* (solusi eksak) dan *SSSF* untuk nilai *Δξ* = 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 dan 0,001.



Gambar 6. Grafik *NSD* terhadap jarak perambatan, *ξ*, dengan metode *SSSF* untuk nilai *Δξ* = 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 dan 0,001.



(a) **Metode *IST* (Solusi Eksak)**



(b) Metode *SSSF*

Gambar 7. Perambatan *soliton* orde 2 dengan metode (a). *IST*, (d). *SSSF*, untuk $\Delta\xi$ = 0,005.

Gambar 7.(a) dan 7.(b) adalah perambatan *soliton* orde 2 untuk solusi eksak menggunakan *IST*, dan metode *SSSF* dengan $\Delta\xi$ = 0,005. Dapat dilihat pada Gambar 7.(a) bahwa pulsa optik yang masuk mengalami evolusi sepanjang perambatannya dimana bentuk dan amplitudonya kembali seperti pulsa input setiap perambatan sejauh $\pi/2$, jarak ini disebut periode soliton, ξ_p.

Tabel 3 Nilai *NSD* rata-rata dan periode soliton dengan berbagai nilai $\Delta\xi$ untuk soliton orde 2

Step Size $\Delta\xi$	***NSD rata-rata***	***Periode Soliton*** ξ_p	
		IST	***SSSF***
-	-	$\pi/2$	-
0,1	$3{,}65.10^{-1}$	-	1
0,05	$1{,}04.10^{-1}$	-	1,2
0,01	$5{,}32.10^{-3}$	-	1,5
0,005	$1{,}39.10^{-3}$	-	1,5
0,001	$5{,}71.10^{-5}$	-	1,6

Dari Tabel 3 dapat kita lihat tingkat kesalahan semakin kecil dengan turunnya nilai $\Delta\xi$, demikian juga dengan periode solitonnnya, ξ_p, yang semakin mendekati solusi eksak .

.

4. KESIMPULAN

Metode *SSF* baik *N-First* maupun *D-First* memberikan hasil yang sama dan akurasi yang cukup baik dalam menyelesaikan *NLSE* yaitu dengan tingkat kesalahan turun kira-kira sebesar 2 orde untuk penurunan *step size* sebesar 1 orde.

Metode *SSSF* memberikan tingkat kesalahan yang lebih kecil dibandingkan metode *SSF*, yaitu sekitar 3 orde. Namun tingkat kesalahan ini tidak turun dengan signifikan dengan turunnya *step size*. Hal tersebut disebabkan karena metode *SSSF* melakukan proses lebih panjang dan diperlukan iterasi sehingga turunnya tingkat kesalahan disebabkan turunnya *step size* diimbangi dengan naiknya kesalahan yang lain, misalnya kesalahan pembulatan dan kesalahan perhitungan *FFT*.

Pada metode *SSF* baik *N-First* maupun *D-First* dan metode *SSSF* jumlah sample *FFT* hampir tidak mempengaruhi tingkat kesalahan.

Untuk solusi eksak *NLSE* menggunakan metode *ST* dengan *N = 2* (soliton orde 2) memberikan hasil bahwa pulsa optik yang masuk mengalami evolusi sepanjang perambatannya dimana bentuk dan amplitudonya kembali seperti pulsa input setiap perambatan sejauh $\pi/2$, dimana metode *SSSF* memberikan tingkat kesalahan semakin kecil dan nilai periode soliton yang semakin mendekati solusi eksak untuk nilai *step size* yang semakin kecil.

REFERENSI

[1] Agrawal, P. Govind, *Fiber-Optic Communication Systems*, Willey Series In Microwave And Optical Engineering, (1992).

[2] Jong-Hyung Lee, *Analysis and Characterization of Fiber Nonlinearities with Deterministic and Stochastic Signal Sources*, Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia (February 10, 2000).

[3] Agrawal, P. Govind, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Sandiego, LA, (1989).

[4] Natee Wongsangpaiboon, *Variational Calculation of Optimum Dispersion Compensation For Non-Linear Dispersive Fibers*, Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia (May 17, 2000).